

# LIMITES ET CONTINUITÉ

## PROGRAMME :

- On impose une définition de la limite.
- Théorèmes généraux, Théorème des gendarmes, Limites de référence et croissances comparées
- Continuité : définition, TVI, théorème de la bijection.
- Fonction racine  $n^{\text{ième}}$ .

Remarque : le programme est très directifs sur les définitions et exemples à donner. Il précise que le but du programme n'est plus de déterminer la continuité (ou pas) d'une fonction sur un point ou un intervalle !!

## OBJECTIFS DE LA SEQUENCE:

1. Revoir les limites en insistant bien sur l'intuition d'un côté, un « algorithme » pour résoudre et rédiger les calculs de limites. Démontrer les limites concernant les fonctions logarithme et exponentielle.
2. Donner l'essentiel sur la continuité, en montrant que c'est finalement une question simple. Montrer comment reconnaître dans un énoncé de BAC les questions concernées.
3. Les limites de suites seront à peine mentionnées dans l'introduction pour montrer qu'il s'agit de la même chose, et que les mêmes théorèmes généraux s'appliqueront. Tout cela sera revu dans le chapitre correspondant.

---

## I. Limites

### A) Introduction

1) En partant des expressions « atteindre ses limites / dépasser ses limites », faire comprendre que la limite c'est : « de quoi est proche une grandeur lorsqu'une autre grandeur est proche de quelque chose ».

On écrit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  si Distance[x,a] petit  $\Rightarrow$  Distance[f(x),b] petit

Remarque : Pour a ou b réels, on utilise comme  $|\cdot|$  comme distance (vue en 2<sup>nde</sup>).  
Pour des points du plan on utilise la norme  $\|\cdot\|$  comme distance.

2) Des exemples

- En mécanique : on étudie des trajectoires (en fonction du temps). On se demande quel est le comportement quand t devient grand. Exemple : un solide soumis uniquement aux forces de frottement (un palet de hockey) s'arrête. L'énergie mécanique tend vers zéro. Au contraire, les planètes continuent indéfiniment sur leur trajectoire.
- En statistique : on observe des événements pendant des expériences, à partir desquels on essaie de conjecturer des lois de probabilités. La loi des grands nombres (vue en seconde) nous permet d'estimer cette loi : si le nombre d'expériences est grand (« proche de l'infini ») alors les fréquences empiriques sont proches de la loi de probabilité.
- Un problème « Maths en Jeans » : On pose une carte de France à plat sur une table du lycée. Existe-t-il un point de la carte qui est placé exactement sur le point réel qu'il représente ? En existe-t-il plusieurs ? Cela est-il vrai ailleurs en France ? (*Les élèves auront réfléchi en avance à cette question. La solution sera donnée en classe, elle fait appel à des rectangles emboîtés, dont la limite est un point, le seul point fixe. Illustration avec une feuille de papier plan représentant le plan du tableau, puis avec Google Earth.*) Questions complémentaires : Qu'en est-il si la carte est pliée ?

Déchirée ? Peut-on faire la même chose avec une mappemonde ? Que se passe-t-il si la carte a une échelle 1:1 ?

### 3) Au programme de Terminale : limites de suites et de fonctions

- La limite d'une fonction c'est le comportement de cette fonction (de quoi elle est proche) quand la variable  $x$  est proche d'une valeur fixée. « Être proche de l'infini » c'est tout simplement « être grand », « être proche de 0 » c'est tout simplement « être petit ». C'est une notion très intuitive. On peut conjecturer des limites à partir d'un tableau de valeurs ou d'une courbe tracée à la machine. (*Demander aux élèves l'interprétation graphique des limites, et la définition d'une asymptote.*)
- La dérivée est définie comme une limite : c'est la limite du coefficient directeur d'une corde (droite passant par deux points de la courbe) de la courbe quand les deux points se rapprochent. La droite tangente est la limite des cordes quand les points se rapprochent.
- On étudie aussi des limites de suites (qui dans le fond ne sont que des fonctions de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ ). On veut savoir de quoi se rapproche la valeur de la suite quand  $n$  est proche de  $+\infty$ .

Exemples :  $u_{n+1} = 0,2 \times u_n$

$u_{n+1} = u_n^2$  (distinguer les cas  $u_0 > 1$  et  $u_0 < 1$ , conjecturer les limites sans démo)

*Remarque : Cette intro doit être faite rapidement, les élèves prendront quelques notes s'ils veulent.*

## **B) Définition**

Le programme se contente de la définition intuitive vue en introduction pour les limites d'une fonction en  $a$ . En ce qui concerne les limites en l'infini, on impose une définition plus précise. (*Faire le lien avec la définition intuitive.*)

- Si tout intervalle ouvert contenant  $L$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand, on dit «  $f(x)$  tend vers  $L$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  » et on écrit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ . Ceci s'écrit :

$$\forall \varepsilon \exists M \forall x (x \geq M) \Rightarrow f(x) \in ]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$$

Interprétation graphique : la droite d'équation  $y=L$  est alors asymptote à la courbe de  $f$  en  $+\infty$ . (*faire un dessin*)

- Si tout intervalle  $]A, +\infty[$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand, on dit «  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  » et on écrit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Rappel : Si de plus  $f(x)$  s'écrit  $a \cdot x + b + h(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (a \cdot x + b) = 0$ , donc la courbe de  $f$  est proche de la droite d'équation  $y = a \cdot x + b$ , qui est une asymptote oblique. On peut étudier la position de la courbe de  $f$  par rapport à cette asymptote en étudiant le signe de  $f(x) - (ax + b)$  : si celui-ci est positif alors la courbe de  $f$  sera au-dessus de la droite asymptote.

Exercice 30 page 28 : soit la fonction  $f$  telle que :  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 1}$  Démontrer que la droite d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe. Quelle est la seconde asymptote ?

- Remarque : on a des définitions analogues pour les limites en  $-\infty$ , pour les limites des suites, et pour les limites en un point a fini. En particulier, si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , alors la droite d'équation  $x=a$  est asymptote verticale de la courbe.

### C) Les limites en pratique

Les questions sur les limites se ramènent toujours à l'un des quatre cas suivants. Il s'agit donc d'un côté de savoir reconnaître le cas qui s'applique (l'énoncé donne parfois des indications, du moins pour exclure certains cas), et d'autre part savoir rédiger le calcul.

#### 1. Limites de référence et croissance comparées (admisses)

Il y a un certain nombre de cas simples qu'il faut connaître par cœur afin de calculer ensuite des limites plus compliquées (tout comme on apprend les tables de multiplication afin de poser pouvoir des calculs plus complexes). Ce sont les limites des fonctions usuelles, et les quotients de telles fonctions (de manière à pouvoir les comparer). (Les limites suivantes sont à trous, les élèves doivent les remplir.)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \pm\infty \quad (\text{suivant la parité de } n)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{donc la droite } (y=0) \text{ est asymptote}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{donc la droite } (x=0) \text{ est une asymptote verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$$

Ces dernières limites peuvent se résumer par la phrase : « En  $+\infty$ , la fonction exponentielle augmente plus vite que les fonctions  $x^n$ , qui augmentent plus vite que la fonction logarithme. En  $-\infty$ , la fonction exponentielle décroît plus vite que  $x^n$ . En 0, la fonction  $\ln$  décroît moins vite que la fonction  $x^n$ . »

Remarque que les fonctions *sinus* et *cosinus* n'ont pas de limites en l'infini.

#### 2. Les théorèmes généraux (+,-,x/,o)

Ces théorèmes permettent l'étude de limites complexes (au voisinage de a, pouvant être un réel ou l'infini) à partir de règles de calcul sur des limites simples. (montrer oralement que c'est intuitif grâce à la définition en terme de distances. Rappeler que ces théorèmes marchent aussi pour des suites. Cette partie doit être faite très rapidement.)

F a pour limite en a	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
G a pour limite en a	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
F+G a pour limite en a	L+L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<b>FI</b>	$-\infty$

F a pour limite en a	L	L>0	L<0	+∞	+∞	0
G a pour limite en a	L'	+∞	+∞	+∞	-∞	∓∞
F x G a pour limite en a	LL'	+∞	-∞	+∞	-∞	<b>FI</b>

F a pour limite en a	L	L>0	L	+∞	+∞	+∞	0
G a pour limite en a	L'≠0	0+	+∞	L'>0	0+	+∞	0
F/G a pour limite en a	L/L'	+∞	0	+∞	+∞	<b>FI</b>	<b>FI</b>

On a aussi un théorème pour les fonctions composées (a, b, c réels ou ∞):

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$

En résumé, on peut se servir de l'intuition pour retrouver le résultat de ces calculs, et se souvenir que la règle des signes s'applique dans les calculs avec ∞. Ce dont il faut se souvenir, c'est qu'on ne peut pas conclure dans le cas des quatre formes indéterminées :

$$\infty - \infty, \infty \times 0, \infty / \infty, 0 / 0$$

Ici à chaque fois plusieurs résultats sont possibles. Il faut donc appliquer une technique pour lever l'indétermination.

Exercices 16, 17, 18, 21 page 28 (*Application directe, attention il y a des FI simples. Plutôt que de s'attarder sur les tableaux, voir si les élèves ont compris cela.*)

Ajouter des limites utilisant les fonctions composées :  $\exp(2x+1)$ ,  $\ln(x^2+2)$

### 3. Le cas indéterminés : comment lever l'indétermination

- Le cas  $\infty - \infty$  : on met un terme infini en facteur de manière à transformer la somme en produit. Exemple :  $f(x) = x^2 - x$
- Le cas  $\infty / \infty$  (ou  $\infty \times 0$  ou  $0 / 0$ ) : on peut met en facteur au dénominateur et au numérateur le terme le plus gros. Exemple :  $f(x) = \frac{e^x + 1}{x + 2}$  (donner d'autres exemples)

On peut aussi utiliser le théorème : « A l'infini, un polynôme et une fraction rationnelle se comportent respectivement comme le monôme ou le quotient des monômes de plus haut degré. »

Ex :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \cdot x^3 - 7 \cdot x + 1}{x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \cdot x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 \cdot x$  (d'autres exemples à chercher)

- Le cas  $0 / 0$  : ce cas provient parfois d'une formule de dérivée. On peut conclure en utilisant :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a)}{x} = f'(a)$

Exemples :  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$  ou  $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$  et exercices 30 et 31 page 58

- Les limites contenant des racines carrées : il faut utiliser la quantité conjuguée.  
Exemples :  $g(x) = x - \sqrt{x-1}$  ou  $g(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$

**4. Les théorèmes des gendarmes**

Si  $f \leq g \leq h$  et si  $\lim_a f$  et  $\lim_a h$  existent et sont égales  
 alors  $\lim_a g$  existe, et  $\lim_a g = \lim_a f = \lim_a h$

Si  $f \leq g$  et si  $\lim_a f = +\infty$   
 alors  $\lim_a g$  existe et vaut  $+\infty$

Ces théorèmes se démontrent aisément en utilisant la définition de la limite au programme : si toutes les valeurs de  $f$  et de  $h$  sont dans un même intervalle, alors celles de  $g$  aussi.

Application : calcul de  $\lim_{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ ,  $\lim_{+\infty} e^x$  et  $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x}$  (après avoir démontré que  $e^x > x$ )

Exercice 33 et 34 page 29, 68 page 31

*Remarque : dans cette partie il faut impérativement que les élèves sachent qu'il faut juste repérer dans laquelle des 4 situations on se trouve, et que le reste va tout seul. Insister sur comment rédiger un calcul de limites.*

Exercice type BAC: E page 35, questions 1 à 3c uniquement

## II. Continuité

### A) Introduction

1. Explication de la loi de l'offre et de la demande en économie. Une courbe de demande (décroissante avec le prix) et une courbe d'offre (croissante) se coupent, ceci détermine le prix d'équilibre. Expliquer que si l'on est au-dessus de ce prix, il y a trop d'offre, donc les prix baissent et on revient à l'équilibre.  
 On donne ensuite un exemple où la courbe d'offre est discontinue (un investissement est nécessaire quand la production dépasse un seuil) et il n'y a pas de prix d'équilibre (les courbes ne se coupent pas). Ceci sert d'une part à montrer un exemple de fonction discontinue, et aussi à mentionner rapidement un cas d'imperfection du marché et donc de limite de la loi de l'offre et la demande.
2. En physique, quand on ferme soudain un interrupteur dans un circuit contenant une résistance ou un condensateur, l'intensité subit une discontinuité. De même pour la tension aux bornes d'une bobine. D'autre part, certaines fonctions ne peuvent être discontinues, notamment les énergies (car alors la puissance fournie serait infinie).
3. En biologie : Le criquet est enfermé dans une cuticule inextensible. La taille du criquet, c'est-à-dire celle de sa cuticule, s'accroît brusquement à chaque fois qu'il se débarrasse de son enveloppe rigide, c'est-à-dire à chaque fois qu'il mue. (activité 1 page 10 pour plus de détails).
4. En maths : la fonction  $x \mapsto |x|$  (valeur absolue) est dérivable sur  $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ . Sa dérivée est discontinue. La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ . (Tracer les courbes de ces fonctions.)  
 La fonction partie entière  $x \mapsto n$  tel que  $n \leq x < n+1$  est aussi discontinue. (Cette fonction est à connaître.) (La courbe sera tracée plus tard, dans le cours.)

5. On peut rappeler que les courbes continues sont plus sympathiques à manipuler, et que donc en sciences on passe généralement des mesures nécessairement discrètes à des courbes continues. Exemple : la courbe donnant la taille d'un bébé en fonction du temps. Par exemple pour résoudre des équations : « Au bout de combien de temps le bébé mesure-t-il 62cm ? »

Conclusion : Il existe des fonctions qui ne sont pas continues et des fonctions continues. Nous allons apprendre à reconnaître les fonctions continues et à utiliser leurs propriétés. Les fonctions non continues nous servent essentiellement à mieux comprendre l'intérêt de la continuité, mais on n'en manipulera pas souvent.

## B) Définition et théorèmes généraux

### 1. Définition de la continuité en un point et sur un intervalle

On dit que la fonction  $f$  est continue en  $a$  réel si  $\left\{ \begin{array}{l} F \text{ est définie en } a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \end{array} \right.$

Interprétation graphique : au voisinage de  $a$ , on peut tracer la courbe de  $f$  d'un trait continu, sans lever le crayon.

On dit que  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  si  $f$  est continue en chacun des points de  $I$ .

Convention : pour rendre compte de la continuité de  $f$ , on trace sur le tableau de variation des flèches sans coupures, qui indiquent aussi la monotonie de  $f$  sur l'intervalle considéré.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	↗		↘

### 2. Continuité des fonctions usuelles

Théorème : une fonction dérivable est continue (démontré).

Attention : la réciproque est fautive. La fonction  $|\cdot|$  est continue mais non dérivable en 0.

Conséquence : Les fonctions que l'on a l'habitude de manipuler (polynômes, fractions rationnelles, racines carrées, fonctions trigonométriques) sont continues sur leur ensemble de définition. De même, toute primitive est continue, donc en particulier les logarithmes le sont.

Remarque : la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue **sur son ensemble de définition**, mais pas sur  $\mathbb{R}$ .

### 3. Théorèmes généraux (+, -, \*, /, 0)

La somme, le produit, l'inverse, le quotient (sur les intervalles où il est défini), la composée de fonctions continue sont des fonctions continues.

Remarque : Cette propriété découle des théorèmes généraux sur les limites.

Ces théorèmes montrent que les opérations usuelles sur des fonctions continues ne permettent pas à elles seules d'obtenir des fonctions discontinues. Pour construire une fonction discontinue, il faut soit partir de fonctions discontinues (*partie entière* et *signe* sont les seules au programme), soit définir une fonction par intervalles.

Exemple 1 : la fonction partie entière :  $x \mapsto n$  si  $x \in [n, n+1[$

Cette fonction est continue sur chaque intervalle  $[n, n+1[$  et discontinue en chaque  $\{n\}$

Exemple 2 : la fonction  $\begin{cases} x \mapsto 1 & \text{si } x < 0 \\ x \mapsto x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  est discontinue en 0, mais continue ailleurs.

Exercice de Jérôme Ygé (*il est joli paraît-il...*)

Exemple 3 : la fonction  $\begin{cases} x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ x \mapsto 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , bien qu'elle soit

définie par intervalles. Si On avait posé  $f(0)=1$ , la fonction n'aurait pas été continue en 0.

(Tracer à chaque fois les courbes au tableau, surtout pour la partie entière, qui est à connaître.)

## C) TVI et théorème de la bijection

### 1. Introduction

Un moine part de son monastère à 7 h du matin. Il monte jusqu'au sommet d'une montagne, s'arrêtant quand il est fatigué et selon son rythme. Il arrive au sommet à midi. Il y passe l'après midi, y dors et repart le lendemain à 7 h, il suit exactement le même chemin qu'à l'allé pour arriver à midi au monastère. Existe-t-il un endroit où le moine serait passé exactement à la même heure que la veille ?

**Indice 1 :** Nous ne demandons pas de définir cet endroit, ni l'heure du passage, mais bien si oui ou non ce lieu existe.

**Indice 2 :** Pour mieux comprendre, il faut imaginer que le jour de l'ascension, un autre moine descend, partant à 7 h et arrivant à 11 h au monastère. Ceci ne change rien au problème.

**Réponse :** Ce lieu existe car les deux moines vont se rencontrer.

**Aspect mathématique :** Soit  $F(t)$  la distance monastère-moine en fonction du temps lors de l'ascension et  $g(t)$ , lors de la descente. Ces deux fonctions sont continues.  $F(t)-g(t)$  l'est aussi.  $F(0)-g(0)<0$  et  $F(\text{midi})-g(\text{midi})>0$  On voudrait montrer qu'il existe un temps  $t^\circ$  où  $f(t^\circ)-g(t^\circ)=0$ . C'est le Théorème des valeurs intermédiaires qui permettra de conclure.

**Remarque :** on a rencontré une situation analogue lors de l'étude de la loi de l'offre et la demande.

(Remarque : cette intro sera probablement zappée pour gagner du temps, je me contenterai de rappeler l'intro sur la loi de l'offre et la demande.)

### 2. Le théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$ , si  $a$  et  $b$  sont deux valeurs de  $I$  et  $k$  un réel tel que  $f(a) \leq k \leq f(b)$ ,

alors il existe au moins un réel  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c)=k$ .

(FIGURE A FAIRE)

**Remarque :** Ceci théorème permet d'affirmer l'existence d'au moins une solution (et éventuellement plusieurs) à une équation  $f(x)=k$ , sans pour autant connaître leur valeur)

(Le programme propose éventuellement de démontrer ce résultat par les suites adjacentes, ce sera peut-être fait dans le chapitre correspondant.)

### 3. Le théorème de la bijection

Si la fonction  $f$  est **continue et strictement monotone** sur l'intervalle  $[a,b]$ ,

Alors pour réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  l'équation  $f(x)=k$  admet **une solution unique** dans  $[a,b]$ . On dit que  $f$  est une **bijection** de  $[a,b]$  sur  $[f(a),f(b)]$  ou  $[f(b),f(a)]$  selon que  $f$  est croissante ou décroissante.

Remarque : Ce théorème admet une extension à  $]a,b[$ ,  $[a,b[$  ou  $]a,b[$ , avec  $a$  et  $b$  éventuellement infinis. Il suffit de remplacer dans la conclusion l'intervalle  $[f(a),f(b)]$  par respectivement :

$] \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$ ,  $[f(a), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$ ,  $] \lim_{x \rightarrow a} f(x), f(b)]$  (ou les intervalles inverses si  $f$  est décroissante)

Remarque : La différence entre le TVI et le théorème de la bijection, c'est que dans le deuxième cas on a unicité des solutions, alors que dans le cas du TVI on sait juste qu'il y en a au moins une. Dans la pratique, on étudie d'abord les variations de la fonction  $f$ , puis on applique le théorème de la bijection à chacun des intervalles où  $f$  est monotone.

### 4. Application 1 : résolution approchée d'une équation

- La méthode par dichotomie : On veut résoudre  $x^2=2$ . Le théorème de la bijection nous permet d'affirmer qu'il y a une seule solution positive notée  $x_0$ .  
Comme  $1^2=1 < 2$  et  $2^2=4 > 2$  on sait que  $1 < x_0 < 2$ .  
Comme  $1,5^2 > 2$  on déduit  $1 < x_0 < 1,5$ .  
Comme  $1,2^2 < 2$  on déduit  $1,2 < x_0 < 1,5$ .  
Comme  $1,3^2 < 2$  on déduit  $1,3 < x_0 < 1,5$ .  
Et ainsi de suite. A chaque fois on a un encadrement de plus en plus précis
- La méthode par balayage : on fait un tableau de valeur à la calculatrice de la fonction avec la précision souhaitée (par exemple avec un pas de 0,01), puis on parcourt ce tableau pour trouver un encadrement de la solution.

Exercice 39 page 29, éventuellement aussi 38 page 29 (On y demande de remarquer la monotonie sans utiliser la dérivée)

### 5. Application 2 : Racine n<sup>ième</sup> et autres fonctions réciproques

- On applique le théorème de la bijection à la fonction carré. On obtient la fonction racine carrée qui est la fonction réciproque. Remarquer la symétrie des courbes.
- Faire remarquer que  $\exp$  et  $\ln$  sont aussi réciproques. (*mentionner éventuellement le cas des fonctions trigonométriques, dont ils utilisent déjà la réciproque sans bien la connaître*)
- On applique le théorème de la bijection à la fonction puissance  $n$ .  
On déduit qu'il existe une et une seule solutions réelle positive à l'équation  $x^n=y$ .  
On note  $x = \sqrt[n]{y} = x^{(\frac{1}{n})}$  (racine n<sup>ième</sup>). On étudie cette fonction, sachant qu'elle se dérive comme une puissance ( $x^a$  a pour dérivée  $ax^{a-1}$  même si  $a$  non entier). On remarque que la courbe représentative est symétrique de celle de la fonction puissance.

Remarque : grâce à cela, on a défini les puissances fractionnaires d'un réel positif. Grâce au logarithme et l'exponentielle, on pourra définir aussi les puissances irrationnelles (*c'est un prolongement par continuité*).

### **III. Cadre général de l'étude de fonctions**

*Cette partie ne sera probablement pas traitée car elle ne semble pas dans l'esprit de l'épreuve actuelle du BAC. Dommage, car elle me paraissait essentielle. Il s'agissait de donner un exemple complet d'une étude de fonctions avec tracé sans calculatrice, afin de montrer qu'on procède toujours de la même manière, même si les problèmes de bac détaillent les question.*

- Ensemble de définition
- Continuité et dérivabilité par les théorèmes généraux
- Dérivée et étude du signe
- Tableau de variation
- Calcul de limites
- Courbe ou résolution d'équations (TVI)